KA8 Toinen välikoe 7.12. 2010

1 Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöryhmät. Tarkastele myös vaihediagrammaa ja tasapainon tyyppiä.

a)

$$\dot{x}(t) + x(t) + 2y(t) = 24$$

$$\dot{y}(t) + 2x(t) - 2y(t) = 12$$

b)

$$\dot{x}(t) - 3x(t) + 5y(t) = 10 \qquad x(0) = 8$$

$$\dot{y}(t) - x(t) + 3y(t) = 9 \qquad y(0) = 5$$

2 Ratkaise seuraavat yhtälöt ja yhtälöryhmä.

a)

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + 2y_t = 1 \qquad y_0 = 3, y_1 = 4$$

$k^2 - 2k + 2 = 0$

$k = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$

b)

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 4\sin 4t$$

c)

$$x_{t+1} - x_t - \frac{1}{3}y_t = -1 \qquad x_0 = 5$$

$$y_{t+1} + x_{t+1} - \frac{1}{6}y_t = 8\frac{1}{2} \qquad y = 4$$

3

a) Tarkastellaan seuraavaa Ramsey-mallia: kasvakoon edustavan perheen koko vakiovauhdilla $\dot{L}/L = n$ (=väestönkasvu). Perheen hyötyfunktio olkoon Benthamilainen hyötyfunktio $u[c(t)] \cdot L(t) = \ln[c(t)] \cdot L(t)$; perhe saa siis hyötyä sekä henkeä kohti lasketusta kulutuksesta $c=C/L$, että perheen koosta $L(t) = e^{nt}$. Perheen (=kansantalouden) henkeä kohti laskettu pääomakanta k kasvaa seuraavasti: $\dot{k}(t) = A[k(t)]^{\alpha} - c(t) - (\delta + n)k(t), k(0) = k_0$, missä δ on pääoman kuluma (poisto) ja tuotantofunktion parametrit ovat $A > 0$ ja $0 < \alpha < 1$. Perhe maksimoi aikapreferenssillä $\rho > n$ diskontattua hyöty-virran nykyarvoa valitsemalla sopivan kulutuksen kunakin hetkenä. Ratkaise seuraava optimikontrollitehtävä kontrolli-, tila- ja liittomuuttujien *c(t), k(t)* ja $\lambda(t)$ suhteen, tarkastele myös vaihediagrammaa.

$$Max_{c(t)} \int_0^{\infty} u[c(t)] \cdot L(t) \cdot e^{-\rho t} dt$$

$$\dot{k}(t) = A[k(t)]^{\alpha} - c(t) - (\delta + n)k(t), \quad k(0) = k_0.$$

b) Ratkaise seuraava optimikontrollitehtävät kontrollimuuttujan *u(t)*, tilamuuttujan *x(t)* ja liittomuuttujan *λ(t)* suhteen:

$$MaxU = \int_0^{8} 6x(t)dt$$

$$s.t. \quad \dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$

$$x(0) = 10 \quad x(8) \quad vapaa$$

$$u(t) \in [0,2]$$