Taloustieteiden matematiikka
Lokakuu 2006, I välikoe, Palokangas

1. Tarkastellaan yhden eksogeenisen muuttujan a ja yhden endogeenisen muuttujan x yhtälöä $f(x,a) = 0$. Voidaanko endogeeninen x esittää eksogeenisen muuttujan a funktiona pisteen $(x = 3, a = 1)$ ympäristössä seuraavissa tapauksissa:

   (a) $f(x,a) = a^3 - 2a^2x + 3ax^2 - 22 = 0$

   (b) $f(x,a) = 2a^2 + 4ax - x^4 + 67 = 0$

   Mikäli voidaan, niin laske $\frac{dx}{da}$ kyseisessä pisteessä implisiittisäännön avulla.

2. Maksimoi $f(x,y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$ rajoitteena $x + y = 50$
   (a) sijoitusmenetelmällä
   (b) Lagrangen menetelmällä.

3. Maksimoi $x^2 + y^2 - 2x - 2y$ rajoitteena $x + y \leq 1$.

4. Ratkaise yhtälö $y'' - 7y' + 12y = 14e^{-3t}$, missä y' ja y'' ovat derivaattoja ajan t suhteen. Onko tämä systeemi stabiili vai epästabiili? Mikä on ratkaisu jos $y(0) = 0$ ja $y''(0) = 0$?

The same questions in English:

1. Considerthe equation $f(x,a) = 0$ with one exogenous avriable a and one endogenous variable x. Can the endogenous variable x be expressed as a function $x = X(a)$ of the exogenous variable a in the neighborhood of the point $(x = 3, a = 1)$ in the following cases:

   (a) $f(x,a) = a^3 - 2a^2x + 3ax^2 - 22 = 0$

   (b) $f(x,a) = 2a^2 + 4ax - x^4 + 67 = 0$

   If can, then calculate $\frac{dx}{da}$ in that point by the implicit function theorem.

2. Maximize $f(x,y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$ subject to $x + y = 50$
   (a) by direct substitution
   (b) by the Lagrangean method.

3. Maximize $x^2 + y^2 - 2x - 2y$ subject to $x + y \leq 1$.

4. Find the solution for the system $y'' - 7y' + 12y = 14e^{-3t}$, where y' and y'' are derivatives with respect to t. Is this system stable or unstable? What is the solution with $y(0) = 0$ and $y''(0) = 0$?